10/12/15

Η μη ομογενής ΓΔΕ με σταθερούς συντελεστές:

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$, $(a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$, $b \in C(I)$

Άσκηση Β-53

$y'' - 8y' + 25y = 2\cos x$, $x \in \mathbb{R}$

Ν.δ. $\exists\, a, \delta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε λύση $y$ ισχύει

$\lim_{+\infty} [y(x) - a\cos(x-\delta)] = 0$

*(Πρέπει να βρούμε τα $a, \delta$)

Όλες οι λύσεις τείνουν σε μια περιοδική συνάρτηση, χωρίς όμως να είναι όλες περιοδικές.

Βρίσκουμε ΒΣΛ

$p(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 25$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow -4+3i \\ \searrow -4-3i \end{matrix}$$

$\text{ΒΣΛ} = \{e^{-4x}\cos 3x,\ e^{-4x}\sin 3x\}$

μια μερική λύση $y_p(x) = y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(s)}{W(s)} 2\cos s\, ds + y_2(x)\int_0^x \frac{W_2(s)}{W(s)} 2\cos s\, ds$

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-4x}\cos 3x & e^{-4x}\sin 3x \\ -4e^{-4x}\cos 3x - e^{-4x}3\sin 3x & -4e^{-4x}\sin 3x + e^{-4x}3\cos 3x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-8x}\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -4\cos 3x - 3\sin 3x & -4\sin 3x + 3\cos 3x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-8x}\left[3\cos^2(3x) - \cancel{4\cos 3x \sin 3x} + \cancel{4\cos 3x \sin 3x} + 3\sin^2 3x\right]$$

$= 3e^{-8x}$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-4x}\sin 3x \\ 1 & -4e^{-4x}\sin 3x + e^{-4x}3\cos 3x \end{vmatrix} = -e^{-4x}\sin(3x)$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-4x}\cos 3x & 0 \\ -4e^{-4x}\cos 3x - e^{-4x}3\sin 3x & 1 \end{vmatrix} = e^{-4x}\cos(3x)$$

$$y_\mu(x) = e^{-4x}\cos 3x \int_0^x \frac{-e^{-4s}\sin 3s}{3e^{-8s}} 2\cos(s)ds + e^{-4x}\sin 3x \int_0^x \frac{e^{-4s}\cos 3s \, 2\cos s ds}{3e^{-8s}}$$

$$= e^{-4x}\cos 3x \frac{2}{3}\int_0^x e^{4s}\sin(3s)\cos(s)ds + e^{-4x}\sin 3x \frac{2}{3}\int_0^x e^{4s}\cos(3s)\cos s \, ds =$$

$*\Big($ $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ // $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$\oplus$ $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ // $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \Big)$

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

$\overset{(*)}{=} 1/2\,[\sin 4s + \sin 2s] + 1/2\,[\cos 4s - \sin 2s]$

$e^{4s}\sin ks$ παραγοντικές ολοκληρώσεις.

Τελικά $y_\mu(x) = \frac{3}{40}\cos x + \frac{1}{40}\sin x$

$$y(x) = \underbrace{c_1 \underset{\downarrow 0}{e^{-4x}} \underset{|\,|\leq 1}{\cos 3x}}_{\downarrow 0} + c_2 \underbrace{e^{-4s}\sin 3x}_{\downarrow \text{όμοια}} + y_\mu(x)$$

$\lim_{+\infty} e^{-4x}\cos 3x = 0$

Αρκεί νδο $\lim_{+\infty}[y_\mu(x) - a\cos(x-\delta)] = 0$

$\exists a, \delta \in \mathbb{R}$

δηλαδή $\lim_{+\infty}\left[\frac{3}{40}\cos x + \frac{1}{40}\sin x - a\cos(x-\delta)\right] = 0$

(*) $A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right]$

$= \sqrt{A^2+B^2}\left[\underbrace{\cos\vartheta\cos x + \sin\vartheta\sin x}_{\cos(x-\vartheta)}\right] = \underbrace{\sqrt{A^2+B^2}}_{\alpha}\cos(x-\underbrace{\vartheta}_{\delta})$

$\vartheta : \cos\vartheta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ , $\sin\vartheta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Στην άσκηση $A = 3/40$ , $B = 1/40$

$\theta : \cos\vartheta = \frac{3/40}{\sqrt{(3/40)^2+(1/40)^2}}$ $\quad \sin\vartheta = \frac{1/40}{\sqrt{(3/40)^2+(1/40)^2}}$

Βρέθηκαν $\alpha, \delta$ ώστε να γίνεται μηδέν

<u>Άσκηση Β-20</u> (σελίδα 31, λυμένων)

$y'' + \omega^2 y = A\cos(\omega x)$ , $x \geq 0$ , $A, \omega > 0$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{+\infty} \sup|y(x)| = +\infty$

(Παρόμοια με την ωρονταίμενη)

$P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$

$\lambda_{1,2} = \pm i$ $\qquad \{\cos\omega x, \sin\omega x\} = B\Sigma\Lambda$

δεν έχουν όριο στο $+\infty$.

$y_\mu(x) = \frac{A}{2\omega}x\sin(\omega x)$ , $y(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x) + \frac{A}{2\omega}x\sin(\omega x)$

Πρέπει να "μικρύνω" την $y(x)$, ώστε να δω αν τείνει στο $+\infty$ και <u>όχι</u> να την "μεγαλώσω"

$|y(x)| = \left|c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x) + \frac{A}{2\omega}x\sin(\omega x)\right| \geq \left|\frac{A}{2\omega}\right|\left|x\sin(\omega x)\right| -$

$- |c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)| \geq \underbrace{\frac{A}{2\omega}|x\sin(\omega x)|}$ $- |c_1| - |c_2|$

Αρκεί να δειχθεί ότι πάει στο $+\infty$ αφού τα $c_1, c_2$ δεν το επηρεάζουν.

Scanned by CamScanner

θέλω $\omega x = 2\nu\pi + \pi/2 \Rightarrow x = (2\nu + 1/2)\pi/\omega \longrightarrow +\infty$.
και $\lim_{x_\nu \to +\infty} |x_\nu \sin(\omega x_\nu)| = \lim (2\nu + 1/2)\pi/\omega \cdot 1 = +\infty$.

άρα $\lim_{x_\nu \to \infty} |y(x_\nu)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \sup |y(x)| = +\infty$.

Μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = b$$

$b$: $p(x)$, $e^{kx}p(x)$, $e^{kx}p(x)\begin{Bmatrix}\cos(\lambda x)\\ \text{ή}\\ \sin(\lambda x)\end{Bmatrix}$

(i) $p(x)$ : πολυώνυμο $m$-βαθμού.

<u>Παράδειγμα 3i σελίδα 108</u>

$$y^{(4)} + y'' = x^3 + 1$$

με ενδιαφέρει μια μερική λύση
θέτω $y''(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

$y^{(4)} = 6ax + 2\beta$
$6ax + \beta + ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = x^3 + 1, \; x \in \mathbb{R}$
$ax^3 + \beta x^2 + (\gamma + 6a)x + 2\beta + \delta = x^3 + 1$

$a = 1$
$2\beta = 0$
$\gamma + 6a = 0 \rightsquigarrow \gamma = -6$
$2\beta + \delta = 1 \rightsquigarrow \delta = 1$

$y_\mu'' = x^3 - 6x + 1$

$y_\mu' = \frac{x^4}{4} + \frac{6x^2}{2} + x + c_1$

$$y_\mu = \frac{x^5}{20} + \frac{6x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

<u>Άσκηση 3i σελίδα 113</u>

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 + 3$$

$(E_0)$ $y'' - 5y' + 6y = 0$
$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ → $2$, $3$ $\quad$ ΒΣΛ $= \{e^{2x}, e^{3x}\}$

Θέτω $y(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

Είναι $y' = 2ax + \beta$

$y'' = 2a$

$2a - 5(2ax+\beta) + 6(ax^2+\beta x+\gamma) = x^2+3 \;, x \in \mathbb{R}$

$6ax^2 + (6\beta - 10a)x + 6\gamma - 5\beta + 2a = x^2 + 3$

$6a = 1 \rightsquigarrow a = 1/6$

$6\beta - 10a = 0 \rightsquigarrow 6\beta = \frac{10}{6} \rightsquigarrow \beta = \frac{10}{36}$ // $\rightsquigarrow y_\mu(x) = \ldots \rightsquigarrow y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + y_\mu$

$6\gamma - 5\beta + 2a = 3 \rightsquigarrow \gamma = \ldots$

(ii) $e^{kx} p(x) \quad (k \in \mathbb{C})$

Θέτω $y = e^{kx} z$ και ανάγεται στην (i)

<u>Παράδειγμα 3iii σελίδα 108</u>

$y''' + y'' + 2y = x^2 e^{-2x}$

Θέτω $y = z e^{-2x}$

είναι $(z'' e^{-2x} + 2z'(-2e^{-2x}) + z\,4e^{-2x}) = y''$

$z''' e^{-2x} + 3z''(-2e^{-2x}) + 3z'(4e^{-2x}) + z(-8e^{-2x}) = y'''$

$+ [\, z'' e^{-2x} + 2z'(-2e^{-2x}) + z\,4e^{-2x} + 2z e^{-2x} = x^2 e^{-2x}$

$\Rightarrow z''' - 6z'' + 12z' - 8z + z'' - 4z' + 4z + 2z = x^2$

$\ldots \quad -2z = x^2$ // $z(x) = ax^2 + \beta x + \gamma.$

Scanned by CamScanner